Corrigés chap. 8 ELASTICITE

Exercice 8.1 : contraintes et déformations planes

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \text{ avec } 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \text{ et } \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

1.Trace du tenseur des contraintes.

$$\mathrm{Tr}\sigma = 3\lambda\, \mathrm{Tr}\varepsilon + 2\mu \mathrm{Tr}\varepsilon = (3\lambda + 2\mu)\mathrm{Tr}\varepsilon \text{ avec } 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \text{ et } \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$\mathrm{Tr}\sigma = 3\lambda\, \mathrm{Tr}\varepsilon + 2\mu \mathrm{Tr}\varepsilon = \frac{E}{1-2\nu}\mathrm{Tr}\varepsilon$$

2.Tenseur des déformations.

$$\sigma = \lambda \mathrm{Tr}\varepsilon\, I + 2\mu\varepsilon \text{ donc } \varepsilon = \frac{\sigma}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\mathrm{Tr}\varepsilon\, I \text{ avec } 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \text{ et } \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$\mathrm{Tr}\sigma = \frac{E}{1-2\nu}\mathrm{Tr}\varepsilon \text{ soit } \mathrm{Tr}\varepsilon = \frac{1-2\nu}{E}\mathrm{Tr}\sigma$$

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\sigma\, I$$

3.Déformations planes

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma = \lambda\, \varepsilon_{kk} I + 2\mu\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} & 2\mu\varepsilon_{xy} & 0 \\ 2\mu\varepsilon_{xy} & \lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \end{pmatrix}$$

On remarque que la contrante selon z n'est pas nulle.

4.Contraintes planes

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\sigma\, I = \begin{pmatrix} \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) & \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} & 0 \\ \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} & \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) \end{pmatrix}$$

On remarque que la déformation selon z n'est pas nulle.

Exercice 8.4 Sphère creuse sous pression

On considère une sphère creuse limitée par les rayons R_i et R_e. On se propose de calculer les champs de déplacement, déformation et contrainte dans la sphère lorsqu'une pression P est appliquée en son intérieur. On néglige la gravité et on se place en coordonnées sphériques. La sphère creuse est considérée comme un milieu élastique isotrope de coefficients élastiques λ et μ.

analyser les symétries du problème pour déterminer les composantes non-nulles du champ de déplacement et écrire les composantes du tenseur des déformations en fonction du déplacement.

$$u = u_r(r)\vec{e}_r \quad \text{et donc} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi = \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix}$$

utiliser la loi d'élasticité généralisée pour en déduire les composantes non nulles du tenseur des contraintes.

$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \mathrm{tr}\varepsilon I$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2\mu\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + 2\dfrac{u_r}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\dfrac{u_r}{r} + \lambda\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + 2\dfrac{u_r}{r}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu\dfrac{u_r}{r} + \lambda\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + 2\dfrac{u_r}{r}\right) \end{pmatrix}, \text{ on note que } \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$$

Exprimer l'équilibre mécanique de la sphère à l'aide des composantes du champ de contrainte.

$\overrightarrow{\mathrm{div}\sigma} = \vec{0}$, soit selon $\vec{e}_r$: $\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \dfrac{2\sigma_r - 2\sigma_\theta}{r} = 0$ avec $\sigma_r = \sigma_{rr}$ et $\sigma_\theta = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$

Montrer que la composante radiale du déplacement, u_r, vérifie $r^2\dfrac{d^2u_r}{dr^2} + 2r\dfrac{du_r}{dr} - 2u_r = 0$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0, \quad \sigma_r = 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{u_r}{r} + 2\frac{u_r}{r}\right) \text{ et } \sigma_r - \sigma_\theta = 2\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r}\right)$$

en développant, $(\lambda + 2\mu)\left(r^2\dfrac{d^2u_r}{dr^2} + 2r\dfrac{du_r}{dr} - 2u_r\right) = 0$

Intégrer cette équation différentielle en cherchant les solutions sous la forme r^m

$r^2\dfrac{d^2u_r}{dr^2} + 2r\dfrac{du_r}{dr} - 2u_r = 0$, $\quad u_r = r^m$ donne $m(m-1) + 2m - 2 = 0$

soit $m = -2$ ou 1. Ainsi $u_r = A/r^2 + Br$

Les conditions aux limites portent sur la contrainte radiale en r = Ri (pression P) et en r = Re (aucune pression).

$\sigma_r = 2\mu\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + 2\dfrac{u_r}{r}\right)$ avec $u_r = A/r^2 + Br$

$\sigma_r = 2\mu\left(-2A/r^3 + B\right) + \lambda\left(-2A/r^3 + B + 2A/r^3 + 2B\right) = -4A\mu/r^3 + (2\mu + 3\lambda)B$

$\sigma_{r=Ri} = -4A\mu/R_i^3 + (2\mu + 3\lambda)B = -P$ et $\sigma_{r=Re} = -4A\mu/R_e^3 + (2\mu + 3\lambda)B = 0$

qui donne $A = \dfrac{PR_i^3R_e^3}{4\mu\left(R_e^3 - R_i^3\right)}$ et $B = \dfrac{PR_i^3}{(2\mu + 3\lambda)\left(R_e^3 - R_i^3\right)}$

NB : que devient le champ de contraintes dans une sphère fine de rayon R et d'épaisseur t ?

Contrainte radiale :

$$u_r = A/r^2 + Br \text{ et } \sigma_r = -4A\mu/r^3 + (2\mu+3\lambda)B$$

$$\text{Re=Ri+t soit t= Re - Ri = épaisseur, } \left(R_e^3\text{-}R_i^3\right) = (Re+t)^3\text{-}R_e^3 = R_e^3(1+3t/Re-1) = 3tR_e^2$$

$$A = \frac{PR_i^3R_e^3}{4\mu\left(R_e^3\text{-}R_i^3\right)} = \frac{PR_i^3R_e^3}{12\mu tR_e^2} = \frac{PR^4}{12t\mu} \text{ et } B = \frac{PR_i^3}{(2\mu+3\lambda)\left(R_e^3\text{-}R_i^3\right)} = \frac{PR_i^3}{3(2\mu+3\lambda)tR_e^2} = \frac{PR}{3(2\mu+3\lambda)t}$$

$$\text{Soit } \sigma_r = -\frac{PR^4}{3t\mu}\mu/r^3 + (2\mu+3\lambda)\frac{PR}{3(2\mu+3\lambda)t} = -\frac{PR}{3t\mu}\mu R^3/r^3 + \frac{PR}{3t} \approx -\frac{PR}{3t} + \frac{PR}{3t} = 0$$

Contraintes tangentielles dans une sphère fine de rayon R et d'épaisseur t :

$$u_r = A/r^2 + Br, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\mu\frac{u_r}{r} + \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{u_r}{r}\right) = 2\mu\left(\frac{A}{r^3}+B\right) + \lambda\left(\text{-}2A/r^3 + B + 2A/r^3 + 2B\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu\left(\frac{A}{r^3}+B\right) + 3B\lambda = 2\mu\left(\frac{A}{R^3}+B\right) + 3B\lambda \text{ quand R tend vers Re=Ri+t}$$

$$A \approx \frac{PR^4}{12t\mu} \text{ et } B \approx \frac{PR}{3(2\mu+3\lambda)t}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\mu\left(\frac{A}{R^3}+B\right) + 3B\lambda = 2\mu\left(\frac{PR}{12t\mu} + \frac{PR}{3(2\mu+3\lambda)t}\right) + \lambda\frac{PR}{(2\mu+3\lambda)t}$$

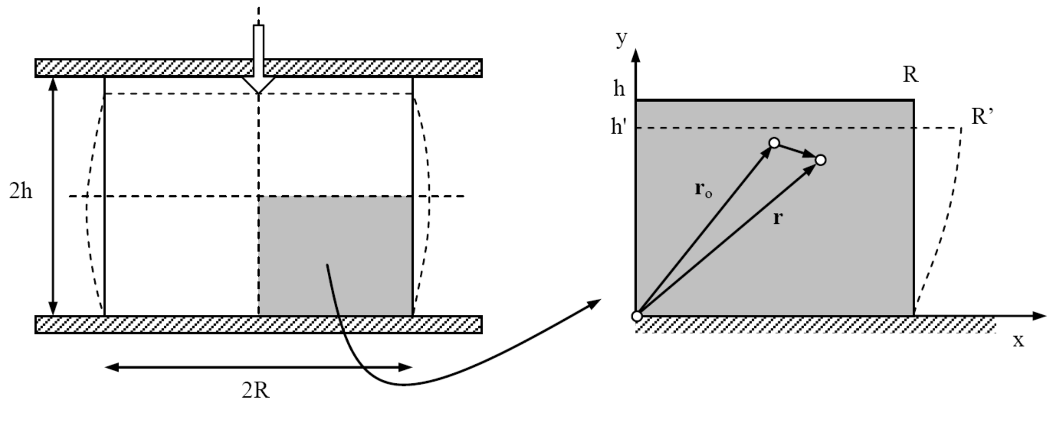
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{PR}{t}\left(\frac{1}{6} + \frac{2\mu}{3(2\mu+3\lambda)} + \lambda\frac{1}{(2\mu+3\lambda)}\right) = \frac{PR}{t}\left(\frac{1}{6} + \frac{2\mu+3\lambda}{3(2\mu+3\lambda)}\right) = \frac{PR}{t}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right) = \frac{PR}{2t}$$

Exercice 8.7 : Déformation élastique d'une poutre

On considère la déformation élastique d'une poutre très longue, de section rectangulaire comprimée entre deux plans parallèles. Le plan supérieur est mobile et le plan inférieur est fixe. Par symétrie du problème, on ne considère qu'un quart de cette plaque dans une coupe transverse. On suppose qu'un point de la poutre initialement en (x,y) se déplace en (x',y') donné par :

$$x' = x\left[1 + \varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2 - \frac{y}{h}\right)\right] \text{ et } y' = (1+\varepsilon_h)\,y \quad \text{avec } \varepsilon_R = \frac{R'\text{-}R}{R} \geq 0 \text{ et } \varepsilon_h = \frac{h'\text{-}h}{h} \leq 0$$

où 2h et 2R sont les hauteur et largeur de la poutre avant déformation et 2h' et 2R' sont les dimensions après déformation. On remarquera que l'on a supposé que les points de la barre en contact avec les plans sont fixes et que la barre adopte après déformation un profil en tonneau.



Calculer les déformations linéarisées, ε_{ij}

$$u_x = \varepsilon_R \frac{xy}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) \text{ et } u_y = \varepsilon_h y \quad \text{avec } \varepsilon_R = \frac{R'-R}{R} \geq 0 \text{ et } \varepsilon_h = \frac{h'-h}{h} \leq 0$$

$$\varepsilon_{lin} = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^t\right) = \begin{pmatrix} \varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) & \frac{1}{2}\varepsilon_R\left(\frac{2x}{h}-\frac{2xy}{h^2}\right) \\ \text{sym} & \varepsilon_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) & \varepsilon_R \frac{x}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right) \\ \text{sym} & \varepsilon_h \end{pmatrix}$$

Calculer les contraintes sachant qu'elles sont liées aux déformations par l'hypothèse des déformations planes : $\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$ **où λ et μ sont les deux coefficients de Lamé.**

$$\varepsilon_{lin} = \begin{pmatrix} \varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) & \varepsilon_R \frac{x}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right) \\ \text{sym} & \varepsilon_h \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right)+\lambda\varepsilon_h & 2\mu\varepsilon_R \frac{x}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right) \\ \text{sym} & \lambda\varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right)+(\lambda+2\mu)\varepsilon_h \end{pmatrix}$$

Que valent les contraintes en y = 0 i.e. au contact avec le support inférieur ?

$$\text{en } y = 0\text{ , } \sigma = \begin{pmatrix} \lambda\varepsilon_h & 2\mu\varepsilon_R \frac{x}{h} \\ \text{sym} & (\lambda+2\mu)\varepsilon_h \end{pmatrix}$$

Calculez alors la densité de force agissant le long de cette paroi, i.e. de x = - R à + R.

$$\text{en } y = 0\text{ , } \sigma = \begin{pmatrix} \lambda\varepsilon_h & 2\mu\varepsilon_R \frac{x}{h} \\ \text{sym} & (\lambda+2\mu)\varepsilon_h \end{pmatrix} \text{ et } t=\sigma\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu\varepsilon_R \frac{x}{h} \\ -(\lambda+2\mu)\varepsilon_h \end{pmatrix}$$

Calculez enfin la réaction $\vec{R}$ du support inférieur supposé fixe. La dimension selon z de la pièce est notée L_z. On exprimera cette réaction en fonction des modules élastiques E et ν sachant que $(\lambda+2\mu) = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$**.**

$$\text{en } y = 0\text{ , } \vec{F} = L_z \int_{-R}^{R} \vec{t} dS = \begin{pmatrix} o \\ -2RL_z(\lambda+2\mu)\varepsilon_h \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \vec{R} = -\vec{F} \text{ et } (\lambda+2\mu) = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ donc } \vec{R} = \frac{RL_z E\varepsilon_h}{(1+\nu)(1-2\nu)}\vec{e}_y$$

Calcul du coefficient de friction en (x,0).

$\text{en } y = 0\text{ , } t=\sigma\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu\varepsilon_R \frac{x}{h} \\ -(\lambda+2\mu)\varepsilon_h \end{pmatrix}$. Le coef. de friction f sur y = 0 est défini en (x,0.) par

$$f = \frac{Fx}{Fy} = \frac{L_z t_x dx}{L_z t_y dx} = \frac{Ty}{Tx} = \frac{2\mu\varepsilon_R}{(\lambda+2\mu)\varepsilon_h}\left(\frac{x}{h}\right)$$

On remarque que le coef. de friction f est max en x = R et vaut 0. en x=0.